一、 微分中值定理及其应用

1. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理 $\xleftarrow{f(a)=f(b)}$ 拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=0$$

$$F(x)=x$$

$$f(a)=f(b)$$

$$F(x)=x$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$n=0$$

柯西中值定理 - - - - - → 泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

2. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

3. 有关中值问题的解题方法

利用**逆向思维**，设辅助函数．一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用**罗尔定理**，可用原函数法找辅助函数．

(2)所证式中出现两端点，可考虑用**拉格朗日定理**.

(3) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用**柯西中值定理**.

(4) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须**多次应用中值定理**.

(5) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用**泰勒公式**，有时也可考虑**对导数用中值定理**.

(6) 若结论为不等式，要注意**适当放大**或**缩小**的技巧.

例1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1$, 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 所以在 $[0, 2]$ 上连续, 且在 $[0, 2]$ 上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \longrightarrow m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在 $(c, 3)$ 内可导, 由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

分析: $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

要证 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},\quad \eta\in(a,b)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{a+b}$$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件, 故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\quad \xi,\eta\in(a,b)$

例 3　$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=1$

试证存在ζ，$\eta\in(a,b)$使得$e^{\eta-\zeta}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

分析: 问题转化为证　$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\zeta}$

因为 $e^{x}[f(x)+f'(x)]=[e^{x}f(x)]'$，设$F(x)=e^{x}f(x)$

存在$\eta\in(a,\ b)$使得$F'(\eta)=\dfrac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}$,

$$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\zeta}\ ?$$

例4　求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;

$$=\lim_{x\to\infty} x[x\ln(1+\frac{1}{x})-1] = \lim_{x\to\infty}\frac{[x\ln(1+\frac{1}{x})-1]}{\frac{1}{x}}$$

解: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ （令 $t=\frac{1}{x}$）

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty} t^{50}e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}$ (用洛必达法则)

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$ (继续用洛必达法则)

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$

导数应用

1. 研究函数的性态:

增减， 极值， 凹凸，拐点，渐近线，曲率

2. 解决最值问题

• 目标函数的建立与简化

• 最值的判别问题

3. 其他应用： 求不定式极限； 几何应用；

相关变化率; 证明不等式； 研究方程实根等.

例1. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x}$ 在 $(0,+\infty)$上单调增加.

证: $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})\ =x[\ln(1+x)-\ln x]$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^{x}[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[x,x+1]$上利用拉格朗日中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\quad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

令 $g(x)=\ln(1+x)-\ln x-\dfrac{1}{1+x}$,用单调性难证$g(x)>0$

利用不等式$\ln x>1-\dfrac{1}{x}(x>0)$,令$t=1+\dfrac{1}{x}$.

例3. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

证: 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\geq 1)$, 用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=e$,

列表判别:

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$ 极大值	$\searrow$

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大点 $x=e$, 因此在 $x=e$ 处 $f(x)$ 也取最大值 . 又因 $2<e<3$,

且 $(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项 .

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=1$$

NJUPT

例4. 设 $f(0)=0$,且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在，且单调递减，证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

证: 设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$ 时, $\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$, 得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立 .

例2. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$, 证明$f(x)$至多只有一个零点.

证: 设 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$

则 $\varphi'(x)=e^{x}[f(x)+f'(x)]>0$

故 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续单调递增, 从而至多只有一个零点.

又因 $e^{x}>0$, 因此 $f(x)$也至多只有一个零点.

思考: 若题中$f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其它不变时, 如何设辅助函数? $\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$

例7. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})\quad (a\neq 0)$

解法1 利用中值定理求极限

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})$ （ξ在 $\frac{a}{n}$与 $\frac{a}{n+1}$之间）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{a}{1+\xi^2}$

$=a$

$a>0$时：$\frac{a}{n+1}<\xi<\frac{a}{n}$

$a<0$时：$\frac{a}{n}<\xi<\frac{a}{n+1}$

$\Rightarrow$ 当$n\to\infty$时，$\xi\to 0$

解法2 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x,$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)=x+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left[\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[\frac{a}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)-o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right]=a$$

解法3 利用罗必塔法则

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arccot}\frac{x}{a}-\operatorname{arccot}\frac{x+1}{a}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{a}{a^2+x^2}+\frac{a}{a^2+(x+1)^2}}{-2x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a(2x^4+x^3)}{2(x^2+a^2)(x^2+2x+1+a^2)} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a\neq 0)$$

例10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})\quad(a\neq 0)$

解法4 利用三角公式

令 $\alpha=\arctan\frac{a}{n}$, $\beta=\arctan\frac{a}{n+1}$,

则 $\tan\alpha=\frac{a}{n}, \tan\beta=\frac{a}{n+1}$,

则 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan a-\tan\beta}{1+\tan a\tan\beta}=\dfrac{a}{n^2+n+a^2}$,

$$原式=\lim_{n\to\infty} n^2(\alpha-\beta)=\lim_{n\to\infty} n^2\arctan(\frac{a}{n^2+n+a^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 a}{n^2+n+a^2}=a$$